13/10/20

Είδαμε την έννοια της συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

$n, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ $\Rightarrow$ Πρέπει να γνωρίζουμε
Συνέπεια

καλά τις ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$ (δηλ. τι είναι) και των υποσυνόλων του

- $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0} = (0, \dots, 0)$

$\underset{\sim}{=} (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

Πράγματι $\bar{x} \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0}$

$\Rightarrow$

$\forall i = 1, \dots, n: \underset{\geq 0}{x_i^2} = 0$

Scanned with CamScanner

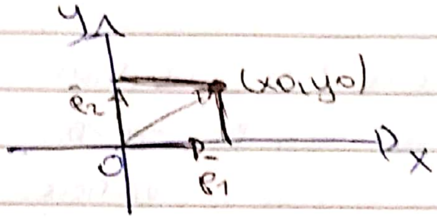
Η ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ και η τριγωνική ανισότητα είναι από τις σημαντικότερες στο αντικείμενο.

<u>Σχόλια:</u> $\bar{x}, \bar{y}$ Γ.Α. $\Rightarrow \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \neq \bar{0}$
[Γιατί αν $\exists (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ τ.ω. $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \bar{0}$ τότε τα $\bar{x}, \bar{y}$ δεν είναι Γ.Α.]

<u>Γεωμετρική ερμηνεία του $\mathbb{R}^n$</u> : $(n=1,2,3)$

(1) Σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$ (ευθεία, επίπεδο, χώρος) αντιστοιχεί <u>μοναδικά</u> (δηλ. 1-1 και επί) ένα <u>διάνυσμα του</u> ($\mathbb{R}^n$)

π.χ. στον $\mathbb{R}^2$

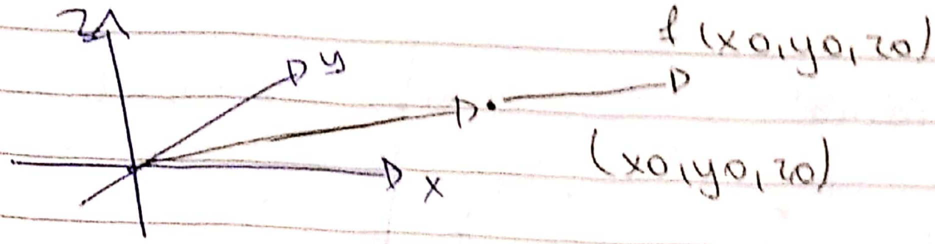


Προσοχή!!! Άλλοτε θεωρούμε το (x_0,y_0) ως σημείο (γεωμετρικά) και άλλοτε ως διάνυσμα.

<u>π.χ.</u> Όταν εξετάζουμε το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας ενός ρευστού στον $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι <u>στο σημείο</u> $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ το ρευστό έχει την ταχύτητα $\bar{f}(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$

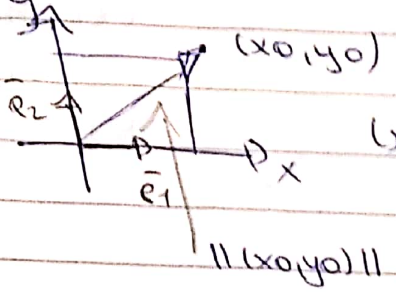
$$\bar{f}(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0,y_0,z_0) \\ f_2(x_0,y_0,z_0) \\ f_3(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

την οποία βλέπουμε ως διάνυσμα.



② Το μήκος του διανύσματος $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, δίνεται από την ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\|\geq 0$

π.χ. $n=2$

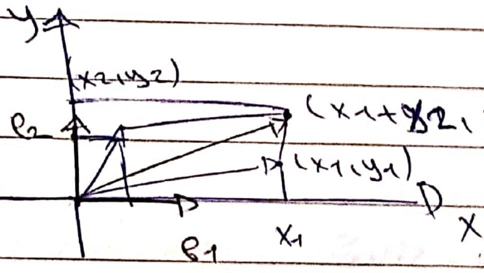


$(x_0,y_0) = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2$
όπου $\bar{e}_1=(1,0)$
$\bar{e}_2=(0,1)$

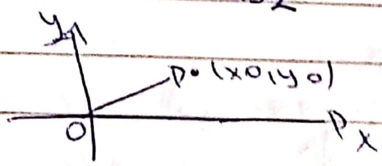
$\|(x_0,y_0)\|^2 = x_0^2 + y_0^2$

③ Η απόσταση 2 σημείων $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ δίνεται από το $\|\bar{x}-\bar{y}\|$, δηλ. το μήκος του διανύσματος $\bar{x}-\bar{y}$

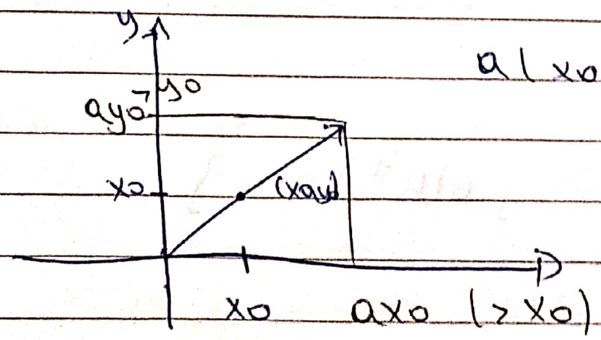
• Τι είναι το $\bar{x}-\bar{y}$? Για να το καταλάβουμε: (δεν μπορούμε να προσθέτουμε σημεία, αλλά μόνο διανύσματα) ας δούμε τι είναι πρόσθεση και τι βαθμωτός πολ/σμός γεωμετρικά: $(n=2)$

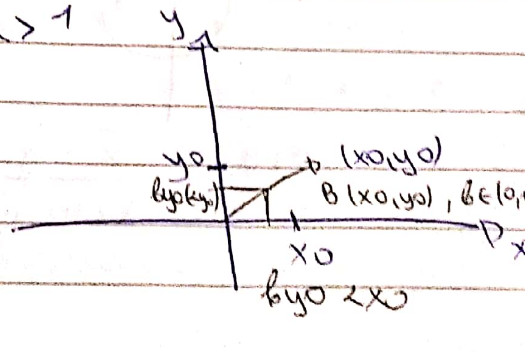


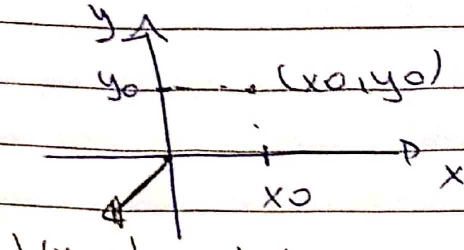
$(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (x_1, x_2) + (y_1,y_2)$ $\cancel{(x_2,y_2)}$



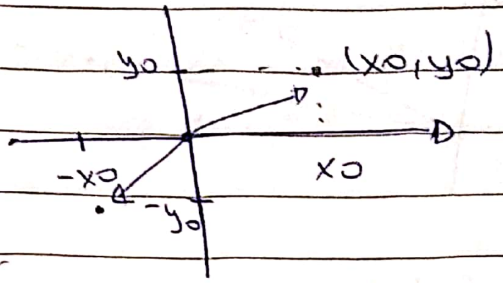
$a(x_0,y_0)$, $a>1$



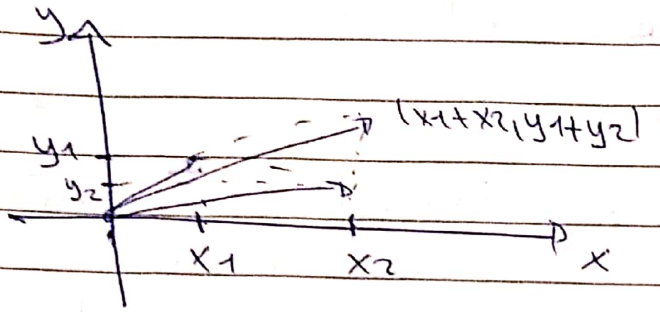




$\lambda(x_0,y_0)$, $\lambda<0$



$(-x_0,-y_0) = -(x_0,y_0)$

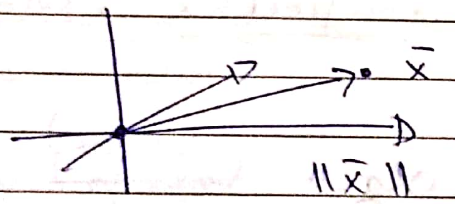


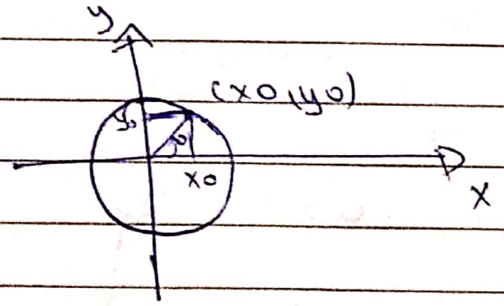
$(x_1,y_1)+(x_3,y_3) =$
$= (x_2,y_2)$
$\Leftrightarrow (x_3,y_3) = (x_2,y_2)$

$\Rightarrow \|(x_3,y_3)\| = \|(x_2,y_2) - (x_1,y_1)\| - (x_1,y_1)$

δηλ. το μήκος του (x_3,y_3) δίνει την απόσταση μεταξύ των σημείων (x_2,y_2) και (x_1,y_1)

Ειδικότερα: το μήκος $\|\bar{x}\| \geq 0$ ενός διανύσματος δίνει την απόσταση του σημείου $\bar{x}$ από το διάνυσμα $\bar{0}$, δηλ. το σημείο της αρχής των αξόνων.





$x_0 = \cos\theta$
$y_0 = \sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} \quad \forall\, \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

Πράγματι (για $n=2$) Αν θεωρήσουμε $\|\bar{x}\|=1$
και $\bar{y}=\bar{e}_1$, τότε $\|\bar{y}\|=1$

$\bar{x}\cdot\bar{y}=(x_1, \ldots, x_n)\cdot(1,0,\ldots,0)=x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\theta = x_1$

Προσοχή! εδώ x, y ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Scanned with CamScanner